

УДК 517.54

А.К. Бахтин, Г.П. Бахтина, И.В. Денег

(Институт математики НАН Украины, Киев)

(Национальный технический университет Украины "Киевский политехнический институт Киев)

(Институт математики НАН Украины, Киев)

Неравенства в задачах о неналегающих областях.

alexander.bahtin@yandex.ru, iradenega@yandex.ru

В данной работе рассмотрена одна достаточно общая задача о неналегающих областях со свободными полюсами на лучевых системах. Основная теорема данной статьи значительно обобщает ранее известные результаты для задач подобного типа.

In this paper we consider quite general problem on non-overlapping domains with free poles on radial systems. The main theorem of this work generalizes the previously known results for problems of this type.

1. Введение. В геометрической теории функций комплексного переменного экстремальные задачи о неналегающих областях являются хорошо известным классическим направлением [1 – 43]. Возникновение данного направления связано с классической работой М.А. Лаврентьева [1], в которой, в частности, была впервые поставлена и решена задача о максимуме произведения конформных радиусов двух непересекающихся односвязных областей. В дальнейшем этот результат получил значительное развитие в работах многих авторов [2 – 43]. В последнее время особое внимание специалистов привлекли задачи с так называемыми "свободными" полюсами [16]–[17], [19]–[40]. При исследовании экстремальных задач важную роль играет теория квадратичных дифференциалов (см.[4]).

В работах [24]–[30], [36] был, в частности, разработан метод кусочно-разделяющего преобразования, который открыл новые возможности для решения экстремальных задач о неналегающих областях. При определенных условиях этот метод позволяет сводить задачи с большим числом неизвестных параметров к задачам с меньшим их числом. Данная работа посвящена исследованию некоторых задач подобного типа.

2. Обозначения и определения.

Пусть \mathbb{N} , \mathbb{R} – множества натуральных и вещественных чисел соответственно, \mathbb{C} – комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ – ее одноточечная компактификация, $r(B, a)$ – внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, относительно точки $a \in B$ (см. напр. [3], [26], [36]), $\chi(t) = \frac{1}{2}(t + t^{-1})$ и $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Систему точек $A_n := \{a_k \in \mathbb{C} : k = \overline{1, n}\}$, назовем n - **лучевой**, если $|a_k| \in \mathbb{R}^+$ при $k = \overline{1, n}$, $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \dots < \arg a_n < 2\pi$. Обозначим при этом $P_k(A_n) := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}$, $\theta_k := \arg a_k$, $a_{n+1} := a_1$, $\theta_{n+1} := 2\pi$, $\alpha_k := \frac{1}{\pi} \arg \frac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1, n}$.

Данная работа базируется на применении кусочно-разделяющего преобразования, развитого в [24]–[30]. Для конкретного использования этого метода рассмотрим специальную систему конформных отображений. Пусть $\zeta = \pi_k(w) = -i(e^{-i\theta_k}w)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $k = \overline{1, n}$ обозначает ту однозначную ветвь многозначной аналитической функции $\pi_k(w)$, которая осуществляет однолистное и конформное отображение $P_k(A_n)$ на правую полуплоскость $\operatorname{Re} \zeta > 0$.

Для произвольной n -лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}$ и $\gamma \in \mathbb{R}^+$ полагаем

$$\mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n) := \prod_{k=1}^n \left[\chi \left(\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} \right) \right]^{1 - \frac{1}{2}\gamma\alpha_k^2} \cdot \prod_{k=1}^n |a_k|^{1 + \frac{1}{4}\gamma(\alpha_k + \alpha_{k-1})}.$$

Класс тех n - лучевых систем точек для которых $\mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n) = 1$ автоматически содержит все n - лучевые системы точек, расположенные на окружности.

Целью данной работы является получение точных оценок сверху для функционалов следующего вида

$$J_n^{(\gamma)} = r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k), \quad (1)$$

где $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ – n -лучевая система точек, $a_0 = 0$, $\{B_k\}_{k=0}^n$ – система неналегающих областей (то есть $B_p \cap B_j = \emptyset$ при $p \neq j$, $p, j = \overline{0, n}$) таких, что $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$ при $k = \overline{0, n}$.

Введем функцию $F(x) = 2^{x^2+6} \cdot x^{x^2+1} \cdot (2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2} (2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2}$, $x \in (0, 2]$.

3. Основные результаты.

Теорема 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ и $\gamma \in (0, 1]$. Тогда для любой n -лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $\mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n) = 1$ и любого набора взаимно непесекающихся областей B_k , $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, справедливо неравенство

$$J_n^{(\gamma)} \leq \gamma^{-\frac{n}{4}} \cdot \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k \right)^{1/2} \cdot \left[F \left(\frac{2}{n} \sqrt{\gamma} \right) \right]^{\frac{n}{2}}. \quad (2)$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда a_k и B_k , $k = \overline{0, n}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2. \quad (3)$$

Доказательство теоремы 1. При доказательстве теоремы 1 существенно используются идеи доказательства теоремы 1 из работы [34] и свойства разделяющего преобразования (см. [24]–[27], [35], [36]). Положим

$$P_k := P_k(A_n) := \{w \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \theta_k < \arg w < \theta_{k+1}\}.$$

Рассмотрим введеную ранее систему функций $\zeta = \pi_k(w) = -i(e^{-i\theta_k}w)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $k = \overline{1, n}$. Пусть $\Omega_k^{(1)}$, $k = \overline{1, n}$, обозначает область плоскости ζ , полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_k \cap \overline{P}_k)$, содержащей точку $\pi_k(a_k)$, со своим симметричным отражением относительно мнимой оси. В свою очередь, через $\Omega_k^{(2)}$, $k = \overline{1, n}$, обозначаем область плоскости \mathbb{C}_ζ , полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_{k+1} \cap \overline{P}_k)$, содержащей точку $\pi_k(a_{k+1})$, со своим симметричным отражением относительно мнимой оси, $B_{n+1} := B_1$, $\pi_n(a_{n+1}) := \pi_n(a_1)$. Кроме того, $\Omega_k^{(0)}$ будет обозначать область плоскости \mathbb{C}_ζ , полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_0 \cap \overline{P}_k)$, содержащей точку $\zeta = 0$, со своим симметричным отражением относительно мнимой оси. Обозначим $\pi_k(a_k) := \omega_k^{(1)}$, $\pi_k(a_{k+1}) := \omega_k^{(2)}$, $k = \overline{1, n}$, $\pi_n(a_{n+1}) := \omega_n^{(2)}$. Из определения функций π_k вытекает, что

$$\begin{aligned} |\pi_k(w) - \omega_k^{(1)}| &\sim \frac{1}{\alpha_k} |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1} \cdot |w - a_k|, \quad w \rightarrow a_k, \quad w \in \overline{P}_k, \\ |\pi_k(w) - \omega_k^{(2)}| &\sim \frac{1}{\alpha_k} |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}-1} \cdot |w - a_{k+1}|, \quad w \rightarrow a_{k+1}, \quad w \in \overline{P}_k, \\ |\pi_k(w)| &\sim |w|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad w \rightarrow 0, \quad w \in \overline{P}_k. \end{aligned}$$

Тогда, используя соответствующие результаты работ [24]–[27], [35], получаем неравенства

$$r(B_k, a_k) \leq \left[\frac{r(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}) \cdot r(\Omega_k^{(2)}, \omega_k^{(2)})}{\frac{1}{\alpha_k} |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1} \cdot \frac{1}{\alpha_{k-1}} |a_k|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4)$$

$$k = \overline{1, n}, \quad \Omega_0^{(2)} := \Omega_n^{(2)}, \quad \omega_0^{(2)} := \omega_n^{(2)},$$

$$r(B_0, 0) \leq \left[\prod_{k=1}^n r^{\alpha_k^2}(\Omega_k^{(0)}, 0) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

Повторяя рассуждения приведенные в [35] при доказательстве теоремы 5.2.1. с учетом введенных наборов областей $\{P_k\}_{k=1}^n$, функций $\{\pi_k\}_{k=1}^n$ и чисел $\{\theta_k\}_{k=1}^n$ получаем неравенство для исследуемого функционала (1)

$$\begin{aligned} J_n^{(\gamma)} &\leq \prod_{k=1}^n \left[r(\Omega_k^{(0)}, 0) \right]^{\frac{\alpha_k^2}{2}\gamma} \cdot \prod_{k=1}^n \left[\frac{r(\Omega_{k-1}^{(2)}, \omega_{k-1}^{(2)}) r(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)})}{\frac{1}{\alpha_{k-1}\alpha_k} |a_k|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1} \cdot |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}} \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \prod_{k=1}^n \alpha_k \cdot \prod_{k=1}^n \frac{|a_k|}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}} \cdot \left[\prod_{k=1}^n r^{\gamma\alpha_k^2}(\Omega_k^{(0)}, 0) \prod_{k=1}^n r(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}) r(\Omega_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}) \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Выражение, стоящее в скобках формулы (6), представляет собой произведение значений функционала $r^{\beta^2}(\Omega_k^{(0)}, 0)r(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)})r(\Omega_k^{(2)}, \omega_k^{(2)})$ на тройках неналегающих областей $(\Omega_k^{(0)}, \Omega_k^{(1)}, \Omega_k^{(2)})$ плоскости ζ .

Известно [32], что функционал

$$Y_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{r^{\sigma_1}(D_1, d_1) \cdot r^{\sigma_2}(D_2, d_2) \cdot r^{\sigma_3}(D_3, d_3)}{|d_1 - d_2|^{\sigma_1+\sigma_2-\sigma_3} \cdot |d_1 - d_3|^{\sigma_1-\sigma_2+\sigma_3} \cdot |d_2 - d_3|^{-\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}},$$

$\sigma_k \in \mathbb{R}^+$, $d_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $D_k \cap D_p = \emptyset$, $k = 1, 2, 3$, $p = 1, 2, 3$, $k \neq p$, инвариантен относительно всех конформных автоморфизмов комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$.

С учетом этого справедлива следующая оценка

$$\begin{aligned} J_n^{(\gamma)} &\leq \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k \right) \cdot \prod_{k=1}^n \frac{|a_k|}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}} \times \\ &\times \left\{ \prod_{k=1}^n \frac{r^{\gamma\alpha_k^2}(\Omega_k^{(0)}, 0) \cdot r(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}) \cdot r(\Omega_k^{(2)}, \omega_k^{(2)})}{|\omega_k^{(1)} \cdot \omega_k^{(2)}|^{\gamma\alpha_k^2} |\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}|^{2-\gamma\alpha_k^2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \times \end{aligned} \quad (7)$$

$$\times \left[\prod_{k=1}^n |\omega_k^{(1)} \cdot \omega_k^{(2)}|^{\gamma \alpha_k^2} |\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}|^{2-\gamma \alpha_k^2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Справедливы соотношения $|\omega_k^{(1)}| = |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $|\omega_k^{(2)}| = |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $|\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}| = |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}$.

Далее, учитывая эти равенства имеем

$$\begin{aligned} J_n^{(\gamma)} &\leq \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k \right) \cdot \prod_{k=1}^n \frac{|a_k|}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}} \times \\ &\times \left(\prod_{k=1}^n |\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}| \right) \left(\prod_{k=1}^n \frac{|\omega_k^{(1)} \cdot \omega_k^{(2)}|}{|\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}|} \right)^{\frac{\gamma \alpha_k^2}{2}} \times \\ &\times \left\{ \prod_{k=1}^n \frac{r^{\gamma \alpha_k^2} \left(\Omega_k^{(0)}, 0 \right) \cdot r \left(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)} \right) \cdot r \left(\Omega_k^{(2)}, \omega_k^{(2)} \right)}{|\omega_k^{(1)} \cdot \omega_k^{(2)}|^{\gamma \alpha_k^2} |\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}|^{2-\gamma \alpha_k^2}} \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= 2^n \cdot \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k \right) \cdot \prod_{k=1}^n \chi \left(\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} \right) |a_k| \times \\ &\times 2^{-\frac{\gamma}{2} \sum_{k=1}^n \alpha_k} \left[\prod_{k=1}^n \chi \left(\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} \right) \right]^{-\frac{\gamma \alpha_k^2}{2}} \left(\prod_{k=1}^n \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \right)^{\frac{\gamma \alpha_k^2}{2}} \times \\ &\times \left\{ \prod_{k=1}^n \frac{r^{\gamma \alpha_k^2} \left(\Omega_k^{(0)}, 0 \right) \cdot r \left(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)} \right) \cdot r \left(\Omega_k^{(2)}, \omega_k^{(2)} \right)}{|\omega_k^{(1)} \cdot \omega_k^{(2)}|^{\gamma \alpha_k^2} |\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}|^{2-\gamma \alpha_k^2}} \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= 2^{n-\frac{\gamma}{2} \sum_{k=1}^n \alpha_k^2} \cdot \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k \right) \cdot \prod_{k=1}^n \left[\chi \left(\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} \right) \right]^{1-\frac{\gamma \alpha_k^2}{2}} \times \\ &\times \prod_{k=1}^n |a_k|^{1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})} \times \\ &\times \left\{ \prod_{k=1}^n \frac{r^{\gamma \alpha_k^2} \left(\Omega_k^{(0)}, 0 \right) \cdot r \left(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)} \right) \cdot r \left(\Omega_k^{(2)}, \omega_k^{(2)} \right)}{|\omega_k^{(1)} \cdot \omega_k^{(2)}|^{\gamma \alpha_k^2} |\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}|^{2-\gamma \alpha_k^2}} \right\}^{\frac{1}{2}} = \end{aligned} \tag{8}$$

$$= 2^{n-\frac{\gamma}{2} \sum_{k=1}^n \alpha_k^2} \cdot \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k \right) \cdot \mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n) \times \\ \times \left\{ \prod_{k=1}^n \frac{r^{\gamma \alpha_k^2} \left(\Omega_k^{(0)}, 0 \right) \cdot r \left(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)} \right) \cdot r \left(\Omega_k^{(2)}, \omega_k^{(2)} \right)}{|\omega_k^{(1)} \cdot \omega_k^{(2)}|^{\gamma \alpha_k^2} |\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}|^{2-\gamma \alpha_k^2}} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

При каждом $k = \overline{1, n}$ несложно указать конформный автоморфизм $\zeta = T_k(z)$ плоскости комплексных чисел $\overline{\mathbb{C}}$ такой, что $T_k(0) = 0$, $T_k\left(\omega_k^{(s)}\right) = (-1)^s \cdot i$, $G_k^{(q)} := T_k\left(\Omega_k^{(q)}\right)$, $k = \overline{1, n}$, $s = 1, 2$, $q = 0, 1, 2$. Тогда

$$\left\{ \prod_{k=1}^n \frac{r^{\gamma \alpha_k^2} \left(\Omega_k^{(0)}, 0 \right) \cdot r \left(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)} \right) \cdot r \left(\Omega_k^{(2)}, \omega_k^{(2)} \right)}{|\omega_k^{(1)} \cdot \omega_k^{(2)}|^{\gamma \alpha_k^2} |\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}|^{2-\gamma \alpha_k^2}} \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ = \left\{ \prod_{k=1}^n \frac{r^{\alpha_k^2 \gamma} \left(G_k^{(0)}, 0 \right) \cdot r \left(G_k^{(1)}, -i \right) \cdot r \left(G_k^{(2)}, i \right)}{2^{2-\gamma \alpha_k^2}} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Далее, используя результаты работ [32] – [35] получим следующее выражение

$$J_n^{(\gamma)} \leq 2^{n-\frac{\gamma}{2} \sum_{k=1}^n \alpha_k^2} \cdot \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k \right) \cdot \mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n) \times \\ \times \prod_{k=1}^n \left\{ \frac{r^{\alpha_k^2 \gamma} \left(G_k^{(0)}, 0 \right) \cdot r \left(G_k^{(1)}, -i \right) \cdot r \left(G_k^{(2)}, i \right)}{2^{2-\gamma \alpha_k^2}} \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ = 2^{n-\frac{\gamma}{2} \sum_{k=1}^n \alpha_k^2} \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k \right) \cdot \mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n) \cdot 2^{-n+\frac{\gamma}{2} \sum_{k=1}^n \alpha_k^2} \times \\ \times \left[\prod_{k=1}^n r^{\alpha_k^2 \gamma} \left(G_k^{(0)}, 0 \right) \cdot r \left(G_k^{(1)}, -i \right) \cdot r \left(G_k^{(2)}, i \right) \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\ \leq \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k \right) \cdot \mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n) \cdot \left[\prod_{k=1}^n r^{\alpha_k^2 \gamma} \left(G_k^{(0)}, 0 \right) \cdot r \left(G_k^{(1)}, -i \right) \cdot r \left(G_k^{(2)}, i \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (9)$$

В результате проведенных вычислений получим неравенство для функционала (1)

$$J_n^{(\gamma)} \leq \gamma^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k \right)^{1/2} \left[\prod_{k=1}^n F \left(\frac{2}{n} \sqrt{\gamma} \right) \right]^{1/2}. \quad (10)$$

Теперь рассмотрим вспомогательный функционал

$$\tilde{J}_n^{(\gamma)} = \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k \right)^{-1/2} \cdot J_n^{(\gamma)}.$$

Из неравенства (10) следует, что

$$\tilde{J}_n = \gamma^{-\frac{n}{4}} \left[\prod_{k=1}^n F \left(\frac{2}{n} \sqrt{\gamma} \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Аналогично [25], рассмотрим экстремальную задачу

$$\prod_{k=1}^n F(\alpha_k) \longrightarrow \max; \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k = 2. \quad (11)$$

Ясно, что необходимые условия экстремума имеют вид

$$\frac{F'(\alpha_k)}{F(\alpha_k)} = -\frac{\lambda}{\prod_{k=1}^n F(\alpha_k)}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (12)$$

(λ – фиксированное, вещественное число). Функция $\Phi(\alpha) = \frac{F'(\alpha)}{F(\alpha)}$ убывает на промежутке $(0, t_0]$, $1,168 < t_0 < 1,170$ и возрастает на $[t_0, 2)$. По аналогии с работой [25] рассмотрим функцию $H(\alpha) = \Phi(\alpha) - \Phi(2 - \alpha)$, $\alpha \in (0, 2)$. Несложные вычисления показывают, что функция $H(\alpha)$ положительна на интервале $(0, 1)$. Обозначим $\alpha_0 = \max_{1 \leq k \leq n} \alpha_k$. Пусть $\alpha_0 = \alpha_{k_0}$, $1 \leq k_0 \leq n$, $k_0 \in \mathbb{N}$. Допустим, что $\alpha_0 > 1$, тогда $\alpha_k \leq 2 - \alpha_0 < 1$ для всех $k = \overline{1, n}$, $k \neq k_0$. Следуя работе [25] получим соотношения

$$\Phi(\alpha_0) = \Phi(2 - (2 - \alpha_0)) < \Phi(2 - \alpha_0) \leq \Phi(\alpha_k), k = \overline{1, n}, k \neq 0.$$

Последнее неравенство противоречит необходимым условиям (12). Поэтому все $\alpha_k \in (0, 1)$, $k = \overline{1, n}$.

Тогда приходим к выводу

$$\tilde{J}_n^{(\gamma)} \leq \gamma^{-\frac{n}{4}} \left[F \left(\frac{2}{n} \sqrt{\gamma} \right) \right]^{n/2}.$$

Возвращаясь к исходному функционалу (1) получаем окончательное неравенство

$$J_n^{(\gamma)} \leq \gamma^{-\frac{n}{4}} \left[\prod_{k=1}^n \alpha_k \right]^{1/2} \left[F \left(\frac{2}{n} \sqrt{\gamma} \right) \right]^{\frac{n}{2}}.$$

Утверждение о знаке равенства проверяется непосредственно.

Из теоремы 1 непосредственно вытекает теорема 4 работы [25].

Следствие 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Тогда для любой системы различных точек единичной окружности $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ и любого набора взаимно непересекающихся областей $\{B_k\}_{k=0}^n$, $0 \in B_0$, $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$ справедливо неравенство

$$r(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \frac{4^{n+\frac{\gamma}{n}} \gamma^{\frac{\gamma}{n}} n^n}{(n^2 - \gamma)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{n - \sqrt{\gamma}}{n + \sqrt{\gamma}} \right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Знак равенства достигается при условиях теоремы 1.

При $\gamma = 1$ и $n \geq 2$ следствие 1 было получено В. Н. Дубининым в работе ([25], 1988 г.), причем из его метода следует, что результат верен и при $0 < \gamma \leq 1$. Позднее Г.В. Кузьмина повторила этот результат для односвязных областей другим методом.

Из неравенства (9) и метода доказательства теоремы 1 получаем следующие утверждения.

Следствие 2. [37] Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (0, 1]$. Тогда для любой системы различных точек единичной окружности $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ и любого набора взаимно непересекающихся областей $\{B_k\}_{k=0}^n$, $0 \in B_0$, $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$ справедливо неравенство

$$J_n^{(\gamma)} \leq \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k \right)^{1/2} \cdot 2^n \left(\frac{2}{n} \right)^{\frac{n}{2}} \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2} \right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2} \right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}} \right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Знак равенства достигается при условиях теоремы 1.

Следствие 3. [34] Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ и $\gamma \in (0; 0, 2]$. Тогда при условиях

теоремы 1 справедливо неравенство

$$J_n^{(\gamma)} \leq \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k \right) \cdot 2^n \left(\frac{2}{n} \right)^{\frac{n}{2}} \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2} \right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2} \right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}} \right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Знак равенства достигается при условиях теоремы 1.

Следствие 4. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ и $\gamma \in (0, 1]$. Тогда для любой n -лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ и любого набора взаимно непересекающихся областей B_k , $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, справедливо неравенство

$$J_n^{(\gamma)} \leq \frac{4^{n+\frac{\gamma}{n}} \gamma^{\frac{\gamma}{n}} n^n}{(n^2 - \gamma)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{n - \sqrt{\gamma}}{n + \sqrt{\gamma}} \right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда a_k и B_k , $k = \overline{0, n}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + R^n\gamma}{w^2(w^n - R^n)^2} dw^2,$$

где $R^{n+\gamma} = \mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.А. К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – 5. – С. 159 – 245.
2. Г.М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.:Наука, 1966.—628с.
3. Хейман В К. Многолистные функции. - М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 180 с.
4. Дженкинс Дж.А. Однолистные функции и конформные отображения. – М.: Издательство иностр.лит., 1962.—256с.
5. Куфарев П. П. К вопросу о конформных отображениях дополнительных областей// ДАН СССР. – 1950. – 73, № 5. – С. 881–884.
6. Лебедев Н. А. Принцип площадей в теории однолистных функций. – М.: Наука, 1975. – 336 с.

7. Александров И.А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций. – М.: Наука, 1976. – 343 с.
8. Аленицын Ю.Е. Конформные отображения многосвязной области на многолистные канонические поверхности // Изв. АН СССР, сер. матем. – 1964. – 28, 3. – С. 607 – 644.
9. Аленицын Ю.Е. Конформные отображения многосвязной области на многолистные поверхности с прямолинейными разрезами // Изв. АН СССР, сер. матем. – 1965. – **29**, 4. – С. 887 – 902.
10. Куфарев П. П., Фалес А. Э. Об одной экстремальной задаче для дополнительных областей // ДАН СССР, серия мат. – 1951. – 81, № 6, – С. 995 – 998.
11. Куфарев П. П., Фалес А. Э. Об одной экстремальной задаче для дополнительных областей // Уч. зап. Томского ун-та. – 1952. – 17. – С. 25–35.
12. Von Reiner Kühnau. Über zwei Klassen schlichter konformer Abbildungen, Sonderdruck aus Mathematische Nachrichten, – 49 – (1971), H. 1 – 6, p. 173 – 185.
13. Von Reiner Kühnau. Schlichte konforme Abbildungen auf nichtüberlappende Gebiete mit gemeinsamer quasikonformer Fortsetzung, Math. Nachr., – 86 – (1978), p. 175 – 180.
14. Von Reiner Kühnau. Geometrie der konformen Abbildung auf der hyperbolischen Ebene, Sonderdruck aus Mathematische Nachrichten, – 43 – (1970), Haft 1 – 6, p. 239 – 280.
15. Тамразов П. М. Экстремальные конформные отображения и полюсы квадратичных дифференциалов // Известия АН СССР, серия мат. – 1968. – 32, № 5. – С. 1033 – 1043.
16. Бахтина Г. П. Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1975. – 11 с.
17. Бахтина Г.П. О конформных радиусах симметричных неналегающих областей // Современные вопросы вещественного и комплексного анализа. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С. 21 – 27.

18. Емельянов Е. Г. О связи двух задач об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 1987. – 160. – С. 91 – 98.
19. Кузьмина Г.В. Метод экстремальной метрики в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей при наличии свободных параметров // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2003. – 302. – С. 52 – 67.
20. Кузьмина Г.В. Об одном экстремально-метрическом подходе к задачам об экстремальном разбиении // Зап. науч. семин. ПОМИ. – 2006. – Т. 337. – С. 191 – 211.
21. Кузьмина Г.В. О симметричных конфигурациях в задачах об экстремальном разбиении // Зап. науч. семин. ПОМИ. – 2007. – Т. 350. – С. 160 – 172.
22. Кузьмина Г.В. О симметричных конфигурациях в задачах об экстремальном разбиении II // Зап. науч. семин. ПОМИ. – 2008. – Т. 357. – С. 158 – 179.
23. Кузьмина Г.В. О симметричных конфигурациях в задачах об экстремальном разбиении III // Зап. науч. семин. ПОМИ. – 2009. – Т. 371. – С. 117 – 136.
24. Дубинин В.Н. Метод симметризации в задачах о неналегающих областях // Мат. сб. – 1985. – 128, № 1. – С. 110 – 123.
25. Дубинин В.Н. Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – 168. – С. 48 – 66.
26. Дубинин В.Н. Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – 49, № 1(295). – С. 3 – 76.
27. Дубинин В.Н. Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 1997. – 237. – С. 56 – 73.
28. Дубинин В.Н., Ким В.Ю. Усредняющее преобразование множеств и функций на римановых поверхностях // Изв. высших уч. завед. Математика – 2001. – № 5 (468) – С. 21 – 29.

29. Дубинин В.Н., Ковалев Л.В. Приведенный модуль комплексной сферы // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 1998. – 254. – С. 76 – 94.
30. Дубинин В.Н., Эйрих Н.В. Некоторые применения обобщенных конденсаторов в теории аналитических функций // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2004. – 314. – С. 52 – 74.
31. Бахтин А.К. Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей и открытых множеств // Доп. НАН Украины. – 2006. – № 10. – С.7–13.
32. Колбина Л.И. Конформное отображение единичного круга на неналегающие области// Вестник Ленинград. ун-та. – 1955. – 5. – С. 37 – 43.
33. Ковалев Л.В. К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности. // Дальневосточный матем. сборник. – 1996. – 2. – С. 96 – 98.
34. Бахтина Г.П., Бахтин А.К. Разделяющее преобразование и задачи о неналегающих областях // Збірник праці Ін-ту мат-ки НАН Укр. – 2006. – Т. 3., № 4, – 273 – 281 с.
35. Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Зелинский Ю.Б. Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе. // Праці ін-ту мат-ки НАН Укр. – 2008. – 308 с.
36. Дубинин В.Н. Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного. // Владивосток "Дальнаука" ДВО РАН – 2009. – 390с.
37. Подвысоцкий Р.В. Об одном неравенстве для внутренних радиусов неналегающих областей// Доп. НАН Украины. – 2009. – № 12. – С. 33 – 37.
38. Дубинин В.Н., Кириллова Д.А. Некоторые применения экстремальных разбиений в геометрической теории функций// Дальвост. мат. журн. – 2010. – Т. 10. – №2. – С. 130 – 152.
39. Кириллова Д.А. Об однолистных функциях без общих значений // Изв. вузов. Математика. – 2010. – №9. – С. 86 – 89.

40. Кириллова Д.А. О максимуме мебиусова инварианта в задаче с четырьмя неналегающими областями // Дальневост. мат. журн. – 2010. – Т.10. – №1. – С. 41 – 49.
41. Duren P.L. Univalent functions. – N.Y. Springer-Verlag. , 1983. – 383 p.
42. Duren P.L., Schiffer M. A variation method for function schlicht in annulus // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1962. – **9**. – P. 260 – 272.
43. Duren P.L., Schiffer M. Conformal mappings onto non-overlapping regions // Complex analysis. – Basel: Birkhauser Verlag, 1988. – P. 27 – 39.